ДИНАМИКА ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕН ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ (НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ И ПРАКТИКИ)

Д.В. Анненков, аспирант

Иркутский государственный технический университет

Важнейшей тенденцией последнего времени на фондовом рынке стала автоматизация торговли ценными бумагами. Автоматизация затронула многие аспекты функционирования бирж и, к настоящему времени большинство из них перешло на компьютерную торговлю, отказавшись от традиционного голосового аукциона [1]. Таким образом, мы видим, что программные инструменты и соответствующее им математическое обеспечение для организации торговли непрерывно развивается, следовательно, должны эволюционировать и подходы к анализу результата деятельности таких торговых систем, т.е. цен на акции, облигации и другие виды ценных бумаг.

В настоящее время существует достаточно много различных вероятностных моделей, описывающих поведение финансовых инструментов. Наиболее распространённой является модель, основанная на процессах с независимыми приращениями, поэтому особенно важной проблемой является исследование законов распределения приращений цен финансовых инструментов. Большинство моделей так или иначе связаны с нормальным законом распределения. Вместе с тем, практика показала, что функция плотности наблюдаемых распределений часто весьма сильно отличаются от нормальной. В данном докладе предлагается альтернативный подход, позволяющий получать теоретические распределения достаточно близкие к эмпирическим распределениям приращений цен. Профессором Поповым Е.И. был введён класс так называемых обобщённых законов распределения вероятностей. Плотность распределения первого обобщённого закона распределения задаётся следующим выражением [2]:

$$f(x)=\frac{\beta\cdot\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\mu+\alpha}{\alpha\beta}}}{\Gamma\left(\frac{\mu+\alpha}{\alpha\beta}\right)}\cdot x^{\frac{\mu}{\alpha}}\cdot e^{-\frac{x^{\beta}}{\alpha}}, \qquad (1)$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\mu \geq 0$ и $x \in R^{+}$.

При $\mu = 0$ плотность (1) примет вид:

$$f(x)=\frac{\beta\cdot\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}\cdot e^{-\frac{x^{\beta}}{\alpha}}, \qquad (2)$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $x \in R^{+}$.

Выражение (2) было названо Поповым Е.И. *обобщением нормального и экспоненциального закона распределения вероятностей*. Для исследования распределения цены финансового инструмента воспользуемся симметризованным вариантом плотности (2):

$$f(x)=\frac{\beta\cdot\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}}{2\cdot\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}\cdot e^{-\frac{|x|^{\beta}}{\alpha}}, \qquad (3)$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x \in R$.

На рис. 1 приведены графики плотности (3) при различных значениях параметров. Из графиков видно, что при $0<\beta<1$ плотности имеют достаточно “тяжёлые” хвосты, что часто наблюдается у эмпирических распределений приращений цен. При $1<\beta<2$ наблюдается постепенное уменьшение “толщины” хвоста, по мере приближения к $\beta = 2$.

Одной из существенных проблем для любой модели является оценка параметров. Автором разработан алгоритм оценки параметров распределения (3) по эмпирическим данным. Этот алгоритм реализован в среде Matlab и позволяет, не прибегая к сложным вычислениям (таким как при оценке методом наибольшего правдоподобия), получать достаточно точные оценки параметров α и β.

С целью проверки модели были проанализированы цены на акции различных компаний. На рис. 2 приведены результаты оценки параметров по временному ряду цен для акций ОАО “Иркутск Энерго”. График плотности (3), построенный по оцененным параметрам α и β в большей степени соответствует эмпирическим данным, чем нормальное распределение. График нормальной плотности также построен по оцененным по выборке параметрам m и σ.

Анализ цен на акции других компаний показал, что параметры модели α и β принимают значения в достаточно широких пределах для различных акций. Если α является масштабным параметром, то роль β более значительна – от значения этого параметра зависит форма распределения и “тяжесть” хвостов. Для проанализированных данных параметр β принимал значения от 0,6 до 1,8.

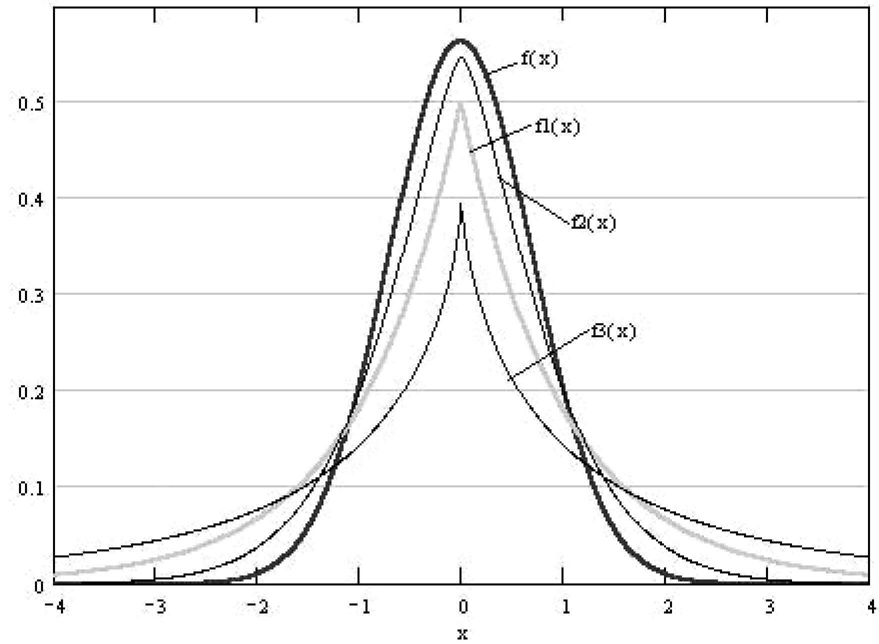

Рис. 1. Графики плотности (3) при различных значениях параметров
(*f(x)* – при $\alpha = 1$, $\beta = 2$; *f1(x)* – при $\alpha = 1$, $\beta = 1$; *f2(x)* – при $\alpha = 1$, $\beta = 1{,}4$; *f3(x)* – при $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}7$)

Данные были получены с фондовой биржи РТС (www.rts.ru) и московской межбанковской валютной биржи (www.micex.ru). Использовались только данные, находящиеся в свободном доступе.

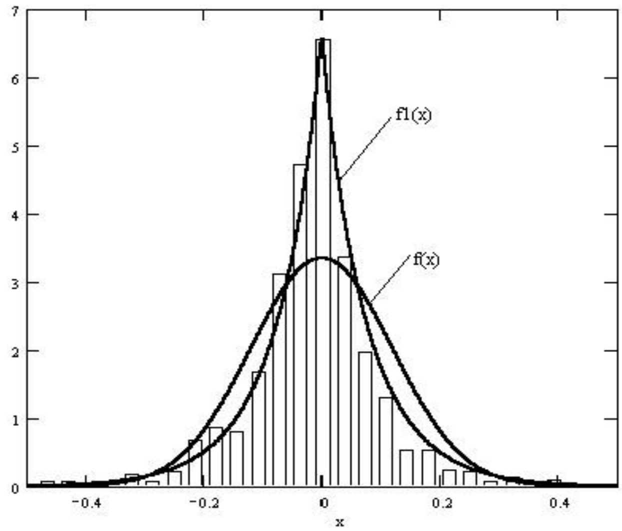

Рис. 2. Гистограмма по приращениям цены на акцию компании “Иркутск Энерго”
f(x) – плотность нормального распределения
f1(x) – плотность (3) с параметрами $\overline{\alpha} = 0{,}083$, $\overline{\beta} = 0{,}96$

Наиболее интересно сравнение предлагаемой модели с широко используемой моделью, основанной на нормальном распределении. Это сравнение интересно по той причине, что ещё на заре финансовой математики Л. Башелье предложил использовать для описания динамики изменения цены процесс, получивший в дальнейшем название броуновского движения.

Броуновское движение или процесс Башелье – Винера $S=(S_t)_{t\geq 0}$ определяется тем условием, что $S_0=0$ и что при $\tau > t$ величина $S_\tau - S_t$ не зависит от S_t. Иными словами, процесс имеет независимые приращения и стационарные переходные вероятности. При $\tau > t$ переходные вероятности, характеризующие переход из (t, S_t) в (τ, S_τ), нормальны с математическим ожиданием S_t и дисперсией $\sigma^2(\tau - t)$, т.е.

$$f(S_\tau, \tau \mid S_t, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\tau - t)}} e^{-\frac{(S_\tau - S_t)^2}{\sigma^2(\tau - t)}} \tag{4}$$

Таким образом, сам процесс, принятый Л. Башелье для описания ценового процесса выглядит следующим образом [4]:

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t, \tag{5}$$

где W_t – стандартное броуновское движение, а коэффициенты μ и σ называются коэффициентами роста и изменчивости (волатильности), а S_0 – начальное состояние.

Введенный нами процесс, по аналогии с (5) будет иметь вид:

$$x_t = x_0 + \mu t + \alpha^{1/\beta} \xi_t, \tag{6}$$

где ξ_t - случайный процесс с $\xi_0 = 0$, приращения которого независимы и распределены с плотностью (3) при α=1. Коэффициент μ в формуле (6) играет ту же роль, что и в (5), $\alpha^{1/\beta}$ будет также являться коэффициентом изменчивости.

Стоит упомянуть также модель К. Рэй [3], которая изучала распределения доходности векселей. Она пришла к выводу, что изменения, происходящие с векселем, значительно лучше описываются экспоненциальным распределением и что форма экспоненциального распределения соответствует форме распределения реальных данных хотя и не полностью, но значительно лучше, чем нормальное распределение. Экспоненциальное распределение имеет высокий центральный пик и большие "хвосты", что, по мнению К. Рэй, типично для изменений доходности векселя.

Интересной особенностью выражений (1) - (3) является то, что при различных значениях параметров α, β и μ можно получать функции плотности многих известных распределений вероятности (гамма-распределение, Вейбула, Максвелла и др.). При $\alpha = 2\sigma^2$, β = 2, μ = 0 имеем плотность нормального распределения, а при $\alpha = \frac{1}{\lambda}$, β = 1 μ = 0 – экспоненциального. При значениях $1 < \beta < 2$ получим принципиально новые плотности, лежащие между нормальным и экспоненциальным распределениями, а при $0 < \beta < 1$ - плотности с более “тяжёлыми” хвостами, чем у экспоненциального распределения. Эта особенность позволяет рассматривать процесс Башелье – Винера и модель К. Рэй как частный случай предлагаемой модели, а также дополнить эти модели реально наблюдаемыми распределениями, получаемыми при других значениях параметров α, β и μ.

Естественно, что в докладе не была затронута такая важная проблема, как устойчивость законов распределений вероятностей, это является темой самостоятельного доклада.

Литература

1. Рубцов Б.Б. Мировые рынки ценных бумаг / Б.Б. Рубцов. М.: ”Издательство “Экзамен”, 2002. – 448 с.

2. Вероятностная модель однопродуктового совершенного рынка / Е.И. Попов // Научные труды международной академии науки и практики организации производства. М.-Воронеж. 1998. Т. 1. С. 55-69.

3. Рэй Кристина И. Рынок облигаций. Торговля и управление рисками: пер. с англ. / К.И. Рэй. – М.: Дело, 1999. – 600 с.

4. Ширяев А.Н. О некоторых понятиях и стохастических моделях финансовой математики / А.Н. Ширяев // Теория вероятностей и её применения. 1994. Т. 1. Вып. 1. С. 4-21.